Matemáticas I **8–Febrero–07**

1. Demuestra, por inducción, que si $r \neq 1$

$$a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad \text{(2 puntos)}$$

Solución:

Si $n = 1$, ambos miembros dan a.

Supongamos cierta la igualdad para $n \geq 1$ y probémosla para $n + 1$:

$$a + ar + \cdots + ar^n = (a + ar + \cdots + ar^{n-1}) + ar^n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} + ar^n =$$

$$= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} + \frac{ar^n(r - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^n - 1) + ar^{n+1} - ar^n}{r - 1} = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1}$$

2. En el conjunto $V = \{a, e, i, o, u\}$ se considera la relación

$$R = \{(a, a), (e, e), (i, i), (o, o), (u, u), (a, i), (i, e), (o, u), (u, o)\}$$

¿Es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva? (2 puntos).

Solución: La relación es reflexiva, pues cada elemento está *emparejado* consigo mismo. No es simétrica porque falta el par (i, a). Tampoco es transitiva por la ausencia del par (a, e). Finalmente, tampoco es antisimétrica por la existencia de los pares $(o, u), (u, o)$.

3. Describe en el lenguaje que estimes oportuno un procedimiento que admita como entrada dos enteros a y $b \neq 0$ y calcule su resto euclídeo (positivo). Aplícalo al par $a = -17$, $b = 5$ (5 puntos)

Solución: Puede tomarse como modelo el procediminto de la página 33 del libro de texto.

En particular, para $a = -17$ y $b = 5$, tomamos en primer lugar $q = 3$ y $r = 2$. Como $a < 0$, el r final será $5 - 2 = 3$.

4. Describe en el lenguaje que estimes oportuno un procedimiento para resolver un sistema de congruencias (caso de dos o más). Aplícalo al sistema

$$\left\{ \begin{array}{cccc} f & \equiv & 2 & \text{mod} \quad x + 1 \\ f & \equiv & 2x + 1 & \text{mod} \quad 3x^2 \end{array} \right. \quad \text{(8 puntos)}$$

Solución:

Tomando las dos primeras congruencias

$$\begin{cases} f & \equiv & 2 & \text{mod} & x+1 \\ f & \equiv & 2x+1 & \text{mod} & 3x^2 \end{cases}$$

buscamos $f = 2 + (x+1).h$ cumpliendo la segunda, es decir

$$2 + (x+1).h \equiv 2x+1 \mod 3x^2$$

Operando,

$$(x+1).h \equiv 2x-1 \mod 3x^2$$

Procedemos a calcular el inverso de $(x+1) \mod 3x^2$; al efecto, el algoritmo extendido de Euclides da

$$(1-x)(x+1) + \frac{1}{3}3x^2 = 1$$

Por tanto,

$$h \equiv (1-x)(2x-1) \mod 3x^2$$

$$h \equiv -2x^2 + 3x - 1 \mod 3x^2 \iff h \equiv 3x-1 \mod 3x^2$$

Entonces, $f = 2 + (x+1).h = 2 + (x+1)(3x-1) = 3x^2 + 2x + 1$.

Y la solución general es

$$(3x^2 + 2x + 1) + g(x+1)(3x^2)$$

5. Describe en el lenguaje que estimes oportuno un procedimiento que tome como entrada una matriz cuadrada A y dé como salida una de las siguientes opciones

   - Matrices P regular y D diagonal tales que $P^{-1}AP = D$
   - Imposibilidad de encontrar tales P y D

   Aplícalo a la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (6 puntos).

   Solución: Puede tomarse como modelo el procedimiento de la página 101 del libro de texto.

   Para el caso particular de la matriz A, $|xI - A| = x^3 - 7\,x^2 + 10\,x = x(x-2)(x-5)$.

   Ahora,

$$\dim V(0) = 3 - \text{rang}(A) = 3 - 2 = 1$$
$$\dim V(2) = 3 - \text{rang}(2I - A) = 3 - 2 = 1$$
$$\dim V(5) = 3 - \text{rang}(5I - A) = 3 - 2 = 1$$

   Además,

$$V(0) =< (0,-1,1) > \quad V(2) =< (-1,1,0) > \quad V(5) =< (5,7,3) >$$

   Por tanto,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \text{diag}[0,2,5]$$

6. Describe, en el lenguaje que estimes oportuno, un procedimiento que tome como entrada una familia ortogonal[1] en un $(V, <, >)$ euclídeo y dé como salida una base ortogonal. Aplícalo a la familia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

del espacio $M_2(\mathbf{R})$ con el producto escalar $< A, B >= \text{traza}(A^t B)$ (7 puntos).

(Ind.: Recuerda que la traza de una matriz es la suma de los términos de su diagonal).

Solución: Puede tomarse como modelo el procedimiento de la página 130 del libro de texto.

Para la familia dada tomamos la matriz $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y calculamos a, b, c tales que $D + aA + bB + cC = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$ sea ortogonal a A, B y C. Al efecto,

$$\text{traza}\left(A^t \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{traza}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a \Longrightarrow a = 0$$

$$\text{traza}\left(B^t \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{traza}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = b \Longrightarrow b = 0$$

$$\text{traza}\left(C^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{traza}\begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = c \Longrightarrow c = 0$$

Por tanto, la matriz buscada es la propia D.

7. En el espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$ se consideran las simetrías[2] especulares σ_1 y σ_2 de bases los planos

$$x = 0 \qquad y = 1$$

se pide

(a) Ecuación de σ_1 (1 punto)

(b) Ecuación de σ_2 (2.5 puntos)

(c) Ecuación de $g = \sigma_2 \circ \sigma_1$ (1 punto)

(d) Probar que g es un movimiento (1 punto)

(e) Elementos notables de g (2 puntos)

(f) Ecuaciones implícitas de la imagen, por g, de la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{(2.5 puntos)}$$

Solución:

[1]sin vectores cero

[2]ortogonales

(a) **Ecuación de** σ_1:
El origen queda fijo, por pertenecer a la base. La ecuación es $Y = AX$, donde A se calula, por ejemplo, mediante las imágenes de los puntos fundamentales, siendo éstas prácticamente obvias:

$$\sigma_1(1,0,0) = (-1,0,0) \quad \sigma_1(0,1,0) = (0,1,0) \quad \sigma_1(0,0,1) = (0,0,-1)$$

Por tanto, la ecuación es $Y = AX$ donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) **Ecuación de** σ_2:
La imagen del origen es $(0,2,0)$ y la matriz B se calcula cómodamente a partir de

$$\sigma_2(1,0,0) = (1,2,0) \quad \sigma_2(0,1,0) = (0,1,0) \quad \sigma_2(0,0,1) = (0,2,1)$$

Entonces,

$$B^1 = (1,2,0)^t - (0,2,0)^t = (1,0,0)^t \quad B^2 = (0,1,0)^t - (0,2,0)^t = (0,-1,0)^t$$

$$B^3 = (0,2,1)^t - (0,2,0)^t = (0,0,1)^t$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la ecuación es $Y = (0,2,0)^t + BX$.

(c) **Ecuación de** $g = \sigma_2 \circ \sigma_1$:
La transformación es

$$X \hookrightarrow AX \hookrightarrow (0,2,0)^t + B(AX) = (0,2,0)^t + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

Es decir, la ecuación es

$$Y = (0,2,0)^t + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

(d) Denominando C a la matriz de la ecuación, $C^t C = I$ y es un movimiento.

(e) Para ver los elementos notables del movimiento calculamos los rangos; poniendo $c = (0,2,0)^t$:

$$\operatorname{rang}(I - C) = 2 = \operatorname{rang}(I - C|c)$$

En estas condiciones, se trata de un giro axial. Para calcular el eje, planteamos

$$(I-C)X = c \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 0 \\ 2y = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

exactamente, la recta de corte de los dos planos[3].
Finalmente, el ángulo de giro se obtiene de

$$\det(xI - C) = (x-1)(x^2 + 2x + 1)$$

Es decir,

$$\cos\alpha = -1 \Longrightarrow \alpha = \pi$$

exactamente, el doble del ángulo que forman los dos planos[4].

(f) La imagen de una recta por un movimiento es una recta. Tomamos pues dos puntos $P(1,0,0)$, $Q(1,0,1)$ en r y calculamos sus imágenes

$$g(P) = (0,2,0)^t + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1,0,0)^t = (-1,2,0)^t$$

$$g(Q) = (0,2,0)^t + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1,0,1)^t = (-1,2,1)^t$$

Y la ecuación de la recta imagen se deduce de

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Es decir,

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -1 \\ y & = & 2 \end{array} \right.$$

[3]Como debe ser
[4]No faltaría más